２０２４年度岡山大学理学部第３年次編入学
試験問題（一般入試）

専 門 科 目

数 学

（ 数 学 科 ）

注意事項

1 問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は４枚です。

2 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

3 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

4 解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

5 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください

２０２４年度岡山大学理学部第３年次編入学　試験問題（一般入試）

【数学科】

【試験科目：専門科目（数学）】

解答は問題と同じ番号の解答用紙に記入せよ。

1　3 次の正方行列

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ x & 7 & -3\\ y & z & -4\end{pmatrix}$$

について $A^2=A$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) x，y，z の値を求めよ。

(2) A の固有値をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた各固有値に対する A の固有空間の基底を一組ずつ求めよ。

(4) A が対角化可能である理由を述べ，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。また，そのときの P^{-1} を求めよ。

2　n を 2 以上の整数とし，A, B を n 次実正方行列とする。一般に行列 C に対して $\mathrm{rank}(C)$ は C の階数（ランク）を表すものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}({}^tA)$ である理由を述べよ。ただし，${}^tA$ は A の転置行列である。

(2) AB が正則行列であるとき $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ。

(3) $\mathrm{rank}(AB)\leq\mathrm{rank}(B)$ であることを示せ。

(4) $\mathrm{rank}(A+B)\leq\mathrm{rank}(A\mid B)\leq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$ であることを示せ。ただし，$(A\mid B)$ は A と B を並べてできる $(n,2n)$ 行列とする。

3 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

によって定義するとき，$f(x)$ が $x = 0$ において微分可能であることを示し，$f'(0)$ の値を求めよ。

(2) 定積分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

に対して，$I_n + I_{n+1}$ の値を求めよ。また，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

の値を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ は $a_n > 0$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ を満たすとし，数列 $\{b_n\}$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c \neq \pm\infty$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) $c = 0$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{a_1 + \cdots + a_n} = 0$$

となることを示せ。

(2) $c \neq 0$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{a_1 + \cdots + a_n} = c$$

となることを示せ。

(3) 極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^1 + 3^2 + \cdots + (n+1)^n}{1^1 + 2^2 + \cdots + n^n}$$

を求めよ。