

2023年度岡山大学理学部第3年次編入学
試験問題（一般入試）

専 門 科 目

数 学

（ 数 学 科 ）

注意事項

- 1 問題冊子は1冊，解答用紙は4枚，下書き用紙は4枚です。
- 2 すべての解答用紙に受験番号を記入してください。
- 3 各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。
- 4 解答用紙のホッチキスは，外さないでください。
- 5 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください

【数学科】

【試験科目：専門科目 (数学)】

解答は問題と同じ番号の解答用紙に記入せよ。各問題において \mathbb{R} は実数全体の集合を表す。

1 次の行列 A について、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) A の固有値をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めた各固有値に対する A の固有空間の基底を一組ずつ求めよ。
- (3) A が対角化可能であるならば、 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ。 A が対角化不可能であるならば、その理由を説明せよ。

2 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 10 & -7 \\ -2 & -5 & -11 & 9 \\ 4 & 3 & 15 & -11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{pmatrix}$$

と定める。ただし、 $a, b \in \mathbb{R}$ は定数とする。更に、線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ と $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ をそれぞれ $f(x) = Ax$, $g(x) = Bx$ と定める。ここで、 \mathbb{R}^4 は4次元数ベクトル空間を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) A の階数 (ランク) を求めよ。
- (2) f の核 $\text{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ。
- (3) $g(\text{Ker}(f)) \subset \text{Ker}(f)$ が成り立つような a と b をそれぞれ求めよ。

3 f を閉区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ で定義された連続関数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式を示せ：

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x) f(\sin x) dx$$

(2) 次の等式を示せ：

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

(3) 次の定積分の値を求めよ：

$$\int_0^{\pi} x \sin^3 x dx$$

4 \mathbb{R} の部分集合 $A (\neq \emptyset)$ で定義された関数 F が A でリプシッツであるとは、ある定数 $C \geq 0$ が存在し、 F が不等式

$$|F(x) - F(y)| \leq C|x - y| \quad (x, y \in A)$$

を満たすときをいう。また、 C はリプシッツ定数と呼ばれる。以下の問いに答えよ。

(1) f を開区間 $I \subset \mathbb{R}$ で1回連続微分可能な関数とする。このとき、 f が I でリプシッツ定数 K のリプシッツ関数であるための必要十分条件は、

$$|f'(x)| \leq K \quad (x \in I)$$

であることを証明せよ。ここで、 f' は I 上の f の導関数を表す。

(2) 関数 $g(x) = 2|x| + 1 (x \in \mathbb{R})$ は \mathbb{R} でリプシッツであるが、 \mathbb{R} で微分不可能であることを示せ。

(3) h を区間 $J \subset \mathbb{R}$ で定義されたリプシッツ関数とする。このとき、 h は J で一様連続であることを証明せよ。

(4) 関数 $\varphi(x) = \sqrt{3x - 1}$ の定義域 L を答えよ。更に、 φ は L で一様連続であるが、 L でリプシッツでないことを示せ。